T5-1

שיעור 5

תזכורת:

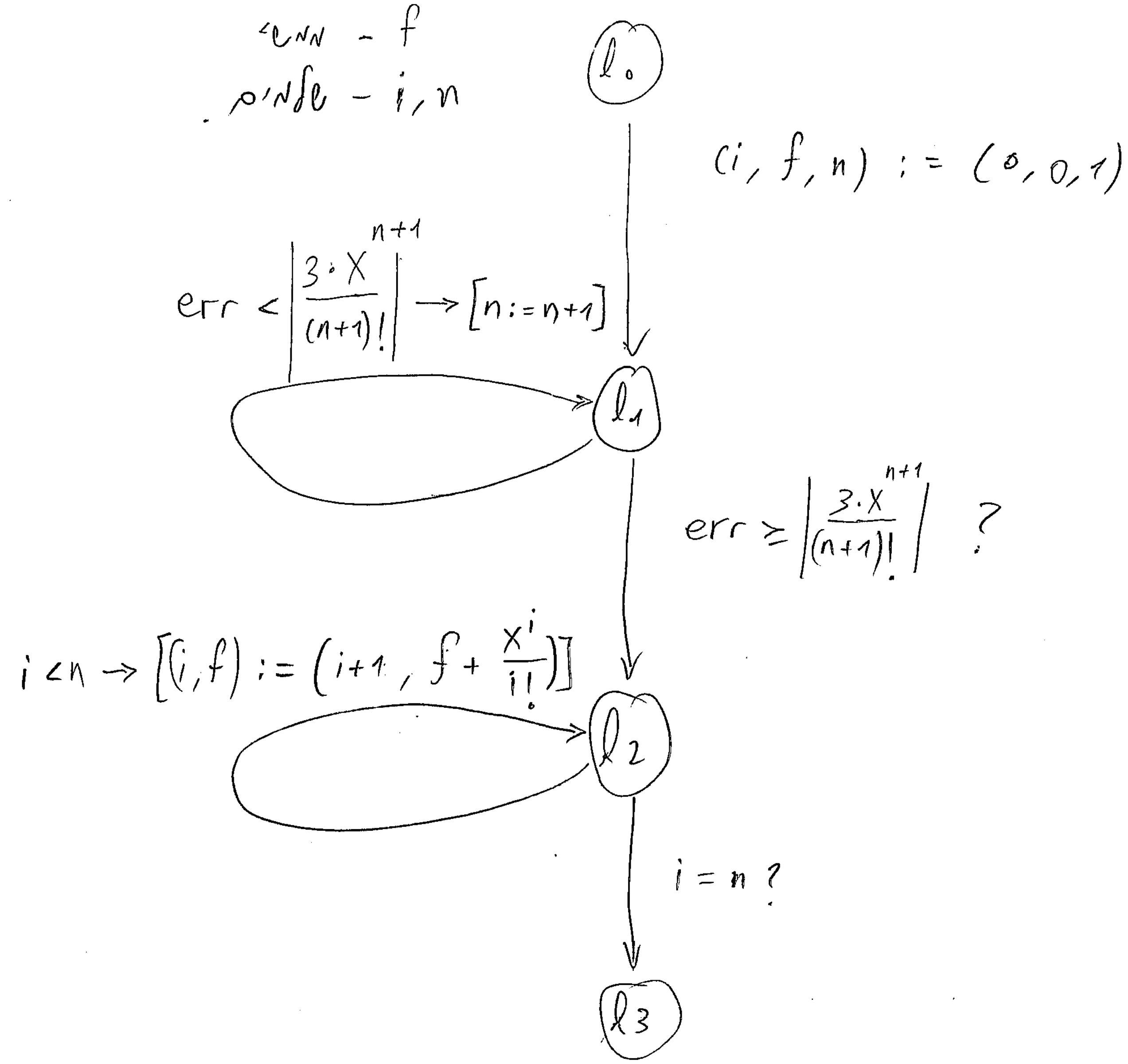
הפונקציה: $f(x) \; : \; \frac{1^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

מקרבת את e^x עד כדי שגיאה של לכל היותר $\left|e \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$

תהי התוכנית P הבאה לחישוב e^x :

f - ממשי

i,n - שלמים.



עם המפרט:

$\varphi: \; err > 0 \quad , \quad \psi: \; e^x - err \leq f \leq e^x + err$

נוכיח success:

נשים לב כי לא ניתן להיתקע ב-l_0 ולא ב-l_1.
נוכיח כי התוכנית לא תיתקע ב-l_2.

- לוק החיתוך הינו: $C = \{l_0, l_1, l_2, l_3\}$
- איך מוצאים טענות לוק החיתוך?

φ_0 : true

φ_1 : $i \le n$

φ_2 : $i \le n$

φ_3 : true

○ תזכורת: הטענות בלוק החיתוך מחלקות את הערכים שהתוכנית יכולה לקבל בכל אחד, לערכים "טובים" ולערכים "רעים". הערכים "הטובים" יעזרו להבטיח את התכונה שאנחנו רוצים להראות, במקרה זה success.

○ האינדוקטיביות מבטיחה כי ברגע שהתוכנית קיבלה ערכים "טובים", היא תוכל לקבל רק ערכים טובים.
(תרשים בעמ' הבא). עקרון זה הוא כללי - אנו מוכיחים ספציפית.

מהם ערכים "טובים" ב-l_3? כל ערך. לכן $\varphi_3 = \text{true}$.

מהם ערכים טובים ב-l_2?
כל הערכים שמקיימים $i<n$ או $i=n$ (כלומר $i \le n$).

מהם ערכים טובים ב-l_1? כל ערך, אבל יעזור לנו להסתכל רק בערכים $i \le n$ כדי להוכיח את מסלול האימות π_{12}.

מהם ערכים טובים ב-l_0? כל ערך.

T5-3

$VC_{01}: \; true \to 0 \le 1 \quad \Leftrightarrow \; true$

$VC_{11}: \; i \le n \wedge C_{\pi_{11}} \to i \le n+1 \quad \Rightarrow true$

$VC_{12}: \; i \le n \wedge C_{\pi_{12}} \to i \le n \quad \Rightarrow true$

כי $i \le n \to i \le n+1$
ומלוגיקה: $a \to b \Rightarrow a \wedge c \to b$

$VC_{22}: \; i \le n \wedge i < n \to i+1 \le n \quad \Rightarrow true$

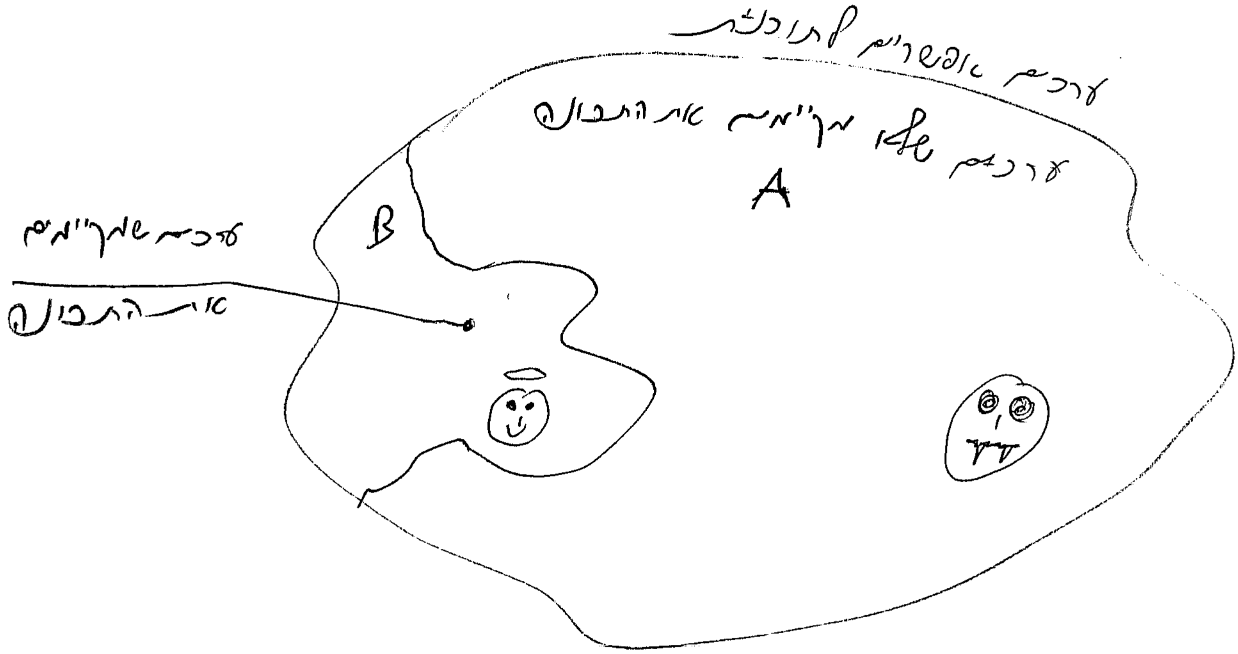
$VC_{23}: \; i \le n \wedge i = n \to true \quad \Rightarrow true$

קיבלנו כי $N = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ רשת אינדוקטיבית

$\phi \to \phi_0$, $\phi_2 \to E_2$ $E_2 = (i<n \vee i=n)$, לפי למה 8

שום חישוב של התכנית P לא יכול להיתקע.

רקע והרחבה:



האינדוקטיביות מבטיחה ש-B סגורה (תחת מעברי התוכנית).
ישנם אלגוריתמים שקרויים מתייצבים עצמית, שבהם בנוסף
לסגירות מתקיימת התכנסות. כלומר, מכל הערכים האפשריים למשתנים,
התכנית תמיד תגיע לערכי משתנים "טובים" ובגלל הסגירות תישאר שם.

TS-4

הוכחת התכנסות :

כדי להוכיח התכנסות התבנית "הטובה" שהתוכנית צריכה לקיים היא ש"ערך מסוים" כל הזמן יקטן. "הערך המסוים" יהיה איבר בקבוצה מבוססת היטב (שלא קיימת בה סדרה יורדת אינסופית). בדוגמה כי הקבוצה תהיה $(\mathbb{N}, <)$.

נגדיר מיפוי של כל מצב אפשרי של התוכנית V ל- $x \in \mathbb{N}$.

המיפוי יתבצע באמצעות קבוצה של פונקציות : $\{\delta_{l_0}, \delta_{l_1}, \delta_{l_2}, \delta_{l_3}\}$

אז הדרך הבאה :

	ϕ_{l_i}	δ_{l_i}
l_0	$err > 0$	$2 \cdot c + 2$
l_1	$1 \le n \le c \wedge i = 0$	$2 \cdot c - n + 2$
l_2	$n = c \wedge 0 \le i \le n$	$n - i + 1$
l_3	$true$	0

כאשר :

$$c = \min\left\{k \in \mathbb{N} : \left|\frac{3 \cdot x^{k+1}}{(k+1)!}\right| \le err \wedge k \ge 1\right\}$$

המיפוי מסדר את מצבי התוכנית האפשריים - מגדיר עליהם סדר.

T5-5

נוכיח אינדוקטיבית, כלומר, שכל טענות האימות מתקיימות לכל מסלולי האימות.

$$VC_{01}: \quad err > 0 \wedge true \rightarrow \overbrace{1 \le 1 \le C \wedge 0 = 0}^{true}$$

$$\Updownarrow$$

$$err > 0 \rightarrow true$$

$$\Updownarrow$$

$$true$$

$$VC_{11}: \quad 1 \le n < C \wedge i = 0 \wedge err < \left|\frac{3 \cdot X^{n+1}}{(n+1)!}\right| \rightarrow$$

$$1 \le n+1 \le C \wedge i = 0$$

מכיוון ש- $\left|\frac{3X^{c+1}}{(c+1)!}\right| \le err < \left|\frac{3 \cdot X^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ אזי $n < C$

כלומר $n+1 \le C$ והטענה VC_{11} מתקיימת.

$$VC_{12}: \quad \underbrace{1 \le n \le C \wedge i = 0 \wedge \left|\frac{3X^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le err}_{\circledast\circledast} \rightarrow n = C \wedge 0 \le i \le n$$

נשים לב כי $\left|\frac{3X^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \left|\frac{3X^{c+1}}{(c+1)!}\right| \overset{\circledast}{\le} err$ שכן c המינימלי שמקיים את $\circledast$.

כלומר $n \ge C$. לפיכך $\circledast\circledast$ גורר כי $n = C$, ו- VC_{12} מתקיים.

$$VC_{22}: \quad n = c \wedge 0 \le i \le n \rightarrow n = c \wedge i < n \rightarrow n = C \wedge 0 \le i+1 \le n$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \le i < C \rightarrow 0 \le i+1 \le C$$

$$\Updownarrow$$

$$true$$

$$VC_{23}: \quad \_\_\_ \rightarrow true \Longleftrightarrow true.$$

T5-6

הוכחנו אינדוקטיביות. (עתה) נראה כי בכל מעבר על מסלול אימות יקטן המספר המשוייך לכל מצב. כלומר: $\varphi_i(V) \wedge C_\pi(V) \to \delta_i(V) > \delta_j(f_\pi(V))$

π_{01}: $err > 0 \wedge true \to 2 \cdot c + 2 > 2c - 1 + 2$

מכיוון ש $1 \le c$ בוודאות מתקיים.

π_{11}: $1 \le n \le c \wedge i = 0 \wedge err < \left| \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \to 2 \cdot c - n + 2 > 2c - (n+1) + 2$

$$\Downarrow$$

$$1 \le n \le c \to 2c - n + 2 > 2c - n + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$true$$

π_{12}: $1 \le n \le c \wedge i = 0 \wedge err \ge \left| \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \to 2c - n + 2 > n - 0 + 1$

מכיוון ש- $2c - n + 2 \ge 2c - c + 2 \ge c + 2 > n + 1$

התנאי מתקיים

π_{22}: $n = c \wedge 0 \le i \le n \wedge i < n \to n - i + 1 > n - (i+1) + 1$

$$\Updownarrow$$

$$0 \le i < c \to c - i + 1 > c - i$$

$$\Updownarrow$$

$$true$$

π_{23}: $n = c \wedge 0 \le i \le n \wedge i = n \to n - i + 1 > 0$ מתקיים.

קיבלנו כי התוכנית מתכנסת.

T5-7

ב. הדרך הקלה

	φ_{l_i}	δ_{l_i}
l_0	$err > 0$	$(3, 0)$
l_1	$1 \le n \le c \wedge i = 0$	$(2, c-n)$
l_2	$0 \le i \le n$	$(1, n-i)$
l_3	$true$	$(0, 0)$

ההוכחה מתקבלת כמקרה פרטי של סע'.