23.2-3

מהו זמן הריצה של BFS כאשר גרף הקלט שלה מיוצג על־ידי מטריצת סמיכויות והאלגוריתם מותאם לאופן ייצוג זה של הקלט?

23.2-4

הראה שבחיפוש לרוחב, הערך $d[u]$ הניתן לקדקוד u אינו תלוי בסדר שבו מופיעים הקדקודים ברשימת הסמיכות.

23.2-5

הבא דוגמה לגרף מכוון $G = (V, E)$, קדקוד מקור $s \in V$, וקבוצה של קשתות עץ $E_\pi \subseteq E$, כך שעבור כל קדקוד $v \in V$, המסלול היחיד ב־E_π מ־s ל־v הוא מסלול קצר ביותר ב־G, אולם קבוצת הקשתות E_π אינה יכולה להתקבל מהרצת BFS על G, ואין זה משנה כיצד מסודרים הקדקודים בכל רשימת סמיכות.

23.2-6

כתוב אלגוריתם יעיל הקובע אם גרף בלתי־מכוון הוא דו־צדדי.

23.2-7 *

הקוטר (diameter) של עץ $T = (V, E)$ נתון על־ידי:

$$\max_{u,v \in V} \delta(u, v)$$

כלומר, הקוטר הוא הגדול מבין מרחקי המסלולים הקצרים ביותר בעץ. כתוב אלגוריתם יעיל לחישוב קוטרו של עץ, ונתח את זמן הריצה של האלגוריתם שלך.

23.2-8

יהי $G = (V, E)$ גרף בלתי־מכוון. כתוב אלגוריתם שזמן ריצתו $O(V + E)$ לחישוב מסלול ב־G אשר עובר בכל קשת ב־E בדיוק פעם אחת בכל כיוון. תאר כיצד תוכל למצוא את דרך היציאה ממבוך אם תינתן לך כמות גדולה של מטבעות.

23.3 חיפוש לעומק

האסטרטגיה הננקטת ב**חיפוש לעומק־תחילה** (depth-first search, ובקיצור: חיפוש לעומק) היא, כפי שמרמז שמו, לחפש "עמוק יותר" בגרף ככל שהדבר אפשרי. בחיפוש לעומק נבדקות הקשתות היוצאות מן הקדקוד שהוא אחרון הקדקודים שהתגלו שעדיין יש לו קשתות היוצאות ממנו וטרם נבדקו. לאחר שנבדקו כל הקשתות היוצאות מ־v, החיפוש "נסוג" וממשיך בבדיקת הקשתות היוצאות מהקדקוד שממנו התגלה v. תהליך זה נמשך עד שמתגלים כל הקדקודים שניתן להגיע אליהם מקדקוד המקור המקורי. אם נותרו קדקודים שטרם התגלו, אחד מהם נבחר כמקור חדש, והחיפוש נמשך ממקור זה. התהליך כולו חוזר על עצמו עד שמתגלים כל הקדקודים.

כמו בחיפוש לרוחב, בכל פעם שמתגלה קדקוד v במהלך הסריקה של רשימת הסמיכות של קדקוד u שכבר התגלה, החיפוש לעומק מציין אירוע זה על־ידי הצבת u, הקודם של v, בשדה $\pi[v]$. שלא כמו חיפוש לרוחב, אשר תת־גרף הקודמים שלו יוצר עץ, תת־גרף הקודמים הנוצר על־ידי חיפוש לעומק עשוי להיות מורכב מכמה עצים, שכן החיפוש עשוי להתנהל מכמה מקורות.

לכן, **תת־גרף הקודמים** (predecessor subgraph) של חיפוש לעומק מוגדר בצורה שונה במקצת מזה של חיפוש לרוחב. נסמן אותו על־ידי $G_\pi = (V, E_\pi)$, כאשר:

$$E_\pi = \{ (\pi[v], v) : \pi[v] \neq \text{NIL} \text{ וגם } v \in V \}$$

תת־גרף הקודמים של חיפוש לעומק יוצר **יער עומק** (depth-first forest) המורכב מכמה **עצי עומק** (depth-first trees). הקשתות ב־E_π נקראות **קשתות עץ** (tree edges).

כמו בחיפוש לרוחב, גם בחיפוש לעומק נצבעים קדקודים במהלך החיפוש כדי לציין את מצבם. כל קדקוד צבוע בתחילה לבן, הוא נצבע באפור כאשר הוא **מתגלה** במהלך החיפוש, והוא נצבע בשחור כאשר הטיפול בו **מסתיים**, כלומר, כאשר רשימת הסמיכות שלו נבדקה במלואה. שיטת פעולה זו מבטיחה שכל קדקוד יימצא לבסוף בדיוק בעץ עומק אחד, ולכן העצים האלה זרים.

בנוסף ליצירת יער עומק, חיפוש לעומק שומר בכל קדקוד **חותמות זמן** (timestamps). לכל קדקוד v יש שתי חותמות זמן: הראשונה, $d[v]$, מציינת מתי התגלה v לראשונה (ונצבע באפור); השנייה, $f[v]$, מציינת מתי סיים החיפוש לבחון את רשימת הסמיכות של v (וצבע אותו בשחור). חותמות זמן אלה משמשות באלגוריתמי גרפים רבים, ובאופן כללי מסייעות בניתוח התנהגותו של חיפוש לעומק.

השגרה DFS שלהלן שומרת את מועד הגילוי של קדקוד u במשתנה $d[u]$ ואת מועד סיום הטיפול בקדקוד u במשתנה $f[u]$. חותמות זמן אלה הן ערכים שלמים בין 1 ל־$2|V|$, שכן כל אחד מ־$|V|$ הקדקודים מתגלה פעם אחת והטיפול בו מסתיים פעם אחת. לכל קדקוד u מתקיים:

$$d[u] < f[u] \tag{23.1}$$

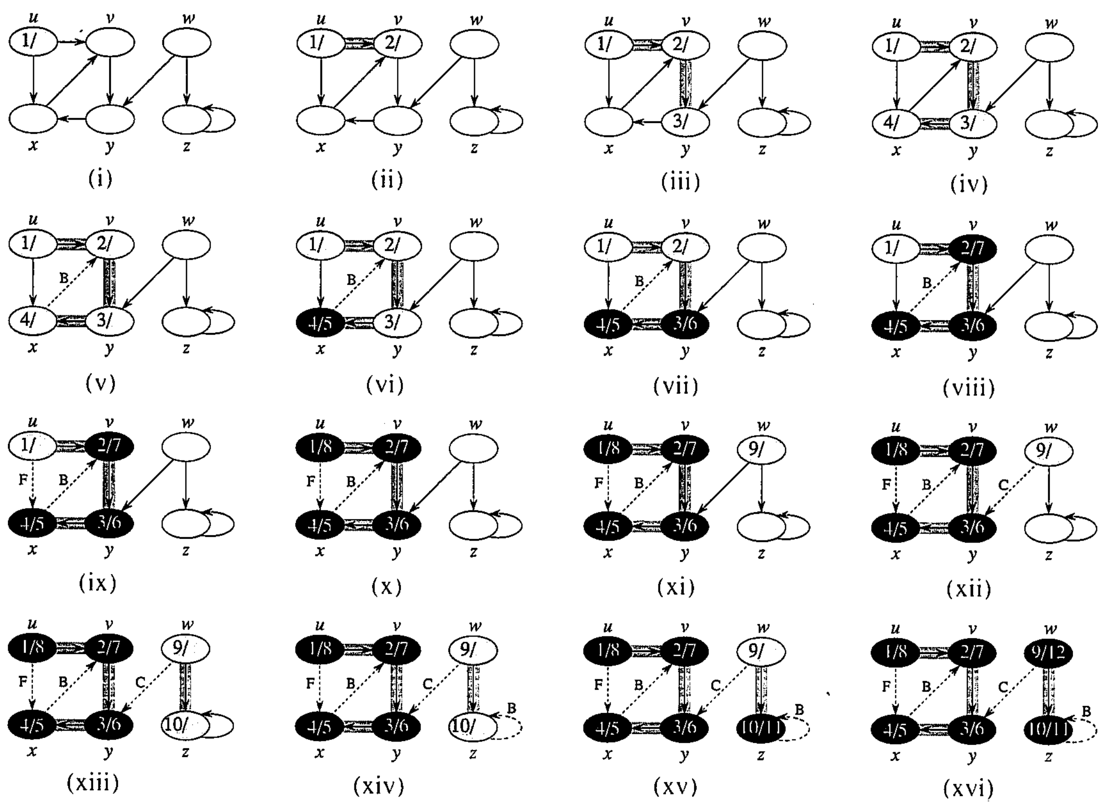
קדקוד u הוא לבן (WHITE) לפני הזמן $d[u]$, אפור (GRAY) בין הזמן $d[u]$ לזמן $f[u]$, ושחור (BLACK) אחרי הזמן $f[u]$.

הפסאדו־קוד שלהלן הוא האלגוריתם הבסיסי לחיפוש לעומק. גרף הקלט G יכול להיות מכוון או בלתי־מכוון. המשתנה *time* הוא משתנה גלובלי המשמש לניהול חותמות־הזמן.

```
DFS(G)
for each vertex u ∈ V[G]
    do color[u] ← WHITE
       π[u] ← NIL
time ← 0
for each vertex u ∈ V[G]
    do if color[u] = WHITE
          then DFS-VISIT(u)
```

```
DFS-VISIT(u)
color[u] ← GRAY                  ▷ White vertex u has just been discovered.
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]              ▷ Explore edge (u, v).
    do if color[v] = WHITE
          then π[v] ← u
               DFS-VISIT(v)
color[u] ← BLACK                 ▷ Blacken u; it is finished.
f[u] ← time ← time + 1
```

איור 23.4 מתאר את התקדמות אלגוריתם החיפוש לעומק DFS על הגרף מאיור 23.2.



איור 23.4 התקדמותו של אלגוריתם החיפוש לעומק DFS על גרף מכוון. עם בדיקתן על־ידי האלגוריתם, הקשתות מוצגות באיור כשהן מוצללות (אם הן קשתות עץ) או מקווקוות (אחרת). קשתות שאינן שייכות לעצים מסומנות על־ידי B, C או F, בהתאם להיותן קשתות אחורה (back), קשתות חוצות (cross) או קשתות קדימה (forward). בתוך הקדקודים מופיעות חותמות־הזמן: מועד הגילוי משמאל ומועד הסיום מימין.

השגרה DFS פועלת באופן הבא: שורות 3-1 צובעות את כל הקדקודים בלבן ומאתחלות את השדות π שלהם לערך NIL. שורה 4 מאפסת את מונה הזמן הגלובלי. שורות 7-5 בודקות כל קדקוד ב־V בתורו, וכאשר נמצא קדקוד לבן, נערך בו "ביקור" באמצעות DFS-Visit. בכל פעם שמתבצעת בשורה 7 קריאה ל־DFS-Visit(u), u הופך לשורש של עץ חדש ביער העומק. כאשר DFS חוזרת, בכל קדקוד u כבר הוצב מועד גילוי $d[u]$ ומועד סיום $f[u]$.

בכל קריאה ל־DFS-Visit(u), הקדקוד u הוא בתחילה לבן. שורה 1 של DFS-Visit צובעת את u באפור, ושורה 2 מחשבת את מועד הגילוי של u על־ידי הוספת 1 למשתנה הגלובלי $time$, ומציבה אותו ב־$d[u]$. שורות 6-3 בוחנות כל קדקוד v הסמוך ל־u ואם v לבן, עורכות בו ביקור באופן רקורסיבי. בכל פעם שקדקוד $v \in Adj[u]$ נבחן בשורה 3, אנו אומרים שהקשת (u, v) **נבדקת** על־ידי החיפוש לעומק. לבסוף, לאחר שנבדקו כל הקשתות היוצאות מ־u, שורות 8-7 צובעות את u בשחור, ומציבות ב־$f[u]$ את מועד הסיום.

מהו זמן הריצה של DFS? הלולאות שבשורות 3-1 ובשורות 7-5 של DFS מתבצעות בזמן $\Theta(V)$, לא כולל הזמן הדרוש לביצוע הקריאות ל־DFS-Visit. השגרה DFS-Visit נקראת בדיוק פעם אחת עבור כל קדקוד $v \in V$, שכן היא נקראת רק על קדקודים לבנים, ופעולתה הראשונה היא לצבוע את הקדקוד באפור. במהלך ביצועה של DFS-Visit(v), הלולאה שבשורות 6-3 מתבצעת $|Adj[v]|$ פעמים. מאחר שמתקיים:

$$\sum_{v \in V} |Adj[v]| = \Theta(E)$$

העלות הכוללת לביצוע שורות 6-3 של DFS-Visit היא $\Theta(E)$. זמן הריצה של DFS הוא אפוא $\Theta(V+E)$.

תכונות של חיפוש לעומק

חיפוש לעומק מניב מידע רב על מבנהו של גרף. התכונה הבסיסית ביותר אולי של חיפוש לעומק היא שתת־גרף הקודמים G_π אכן יוצר יער של עצים, שכן מבנה עצי העומק משקף במדויק את מבנה הקריאות הרקורסיביות ל־DFS-Visit. כלומר, $u = \pi[v]$ אם ורק אם השגרה DFS-Visit$[v]$ נקראת במהלך סריקה של רשימת הסמיכות של u.

תכונה חשובה אחרת של חיפוש לעומק היא שמועדי הגילוי והסיום יוצרים **מבנה סוגריים** (parenthesis structure). אם נייצג את גילויו של קדקוד u על־ידי סוגר שמאלי, "$(u$", ואת סיום הטיפול בו על־ידי סוגר ימני, "$u)$", אזי ההיסטוריה של הגילויים והסיומים תיצור ביטוי בנוי היטב, במובן זה שהסוגריים בביטוי יהיו מקוננים כהלכה. לדוגמה, קיימת התאמה בין החיפוש לעומק המוצג באיור 23.5(i) לבין מבנה הסוגריים בביטוי המופיע באיור 23.5(ii). דרך אחרת לניסוח התנאי של מבנה סוגריים מובאת במשפט הבא.

משפט 23.6 (משפט הסוגריים)
בכל חיפוש לעומק של גרף $G = (V, E)$ (מכוון או בלתי־מכוון), עבור כל שני קדקודים u ו־v, מתקיים בדיוק אחד משלושת התנאים הבאים:

- הקטעים $[d[u], f[u]]$ ו־$[d[v], f[v]]$ זרים לחלוטין;
- הקטע $[d[u], f[u]]$ מוכל כולו בקטע $[d[v], f[v]]$, ו־u הוא צאצא של v בעץ העומק;
- הקטע $[d[v], f[v]]$ מוכל כולו בקטע $[d[u], f[u]]$, ו־v הוא צאצא של u בעץ העומק.

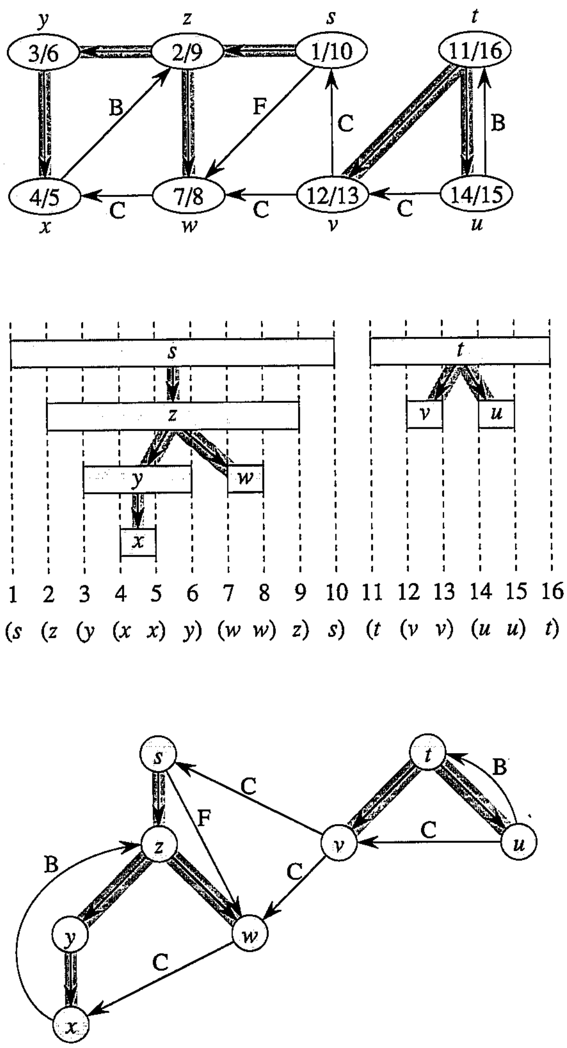
הוכחה נתחיל במקרה שבו $d[u] < d[v]$. יש לבחון שני תת־מקרים: האחד שבו $d[v] < f[u]$ והאחר שבו $d[v] > f[u]$. בתת־מקרה הראשון, $d[v] < f[u]$, ופירוש הדבר ש־v התגלה כאשר u היה עדיין אפור. מכך נובע ש־v הוא צאצא של u. יתר על כן, מכיוון ש־v התגלה אחרי u, כל הקשתות היוצאות ממנו נבדקות והטיפול בו מסתיים לפני שהחיפוש חוזר ל־u ומסיים את הטיפול בו. לכן במקרה זה, הקטע $[d[v], f[v]]$ מוכל כולו בקטע $[d[u], f[u]]$. בתת־מקרה השני, $f[u] < d[v]$, ומאי־שוויון (23.1) נובע שהקטעים $[d[u], f[u]]$ ו־$[d[v], f[v]]$ זרים.

המקרה שבו $d[v] < d[u]$ דומה, ובו מחליפים את תפקידיהם של u ו־v בטיעון שלעיל. ■

מסקנה 23.7 (קינון של קטעי צאצאים)
קדקוד v הוא צאצא ממש של קדקוד u ביער עומק של גרף G (מכוון או בלתי־מכוון) אם ורק אם $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$.

הוכחה ההוכחה נובעת ישירות ממשפט 23.6. ■

(i) (ii) (iii)



איור 23.5 תכונות של חיפוש לעומק. **(i)** תוצאת החיפוש לעומק של גרף מכוון. לקדקודים יש חותמות זמן, וסוגי הקשתות מסומנים כמו באיור 23.4. **(ii)** קיימת התאמה בין הקטעים התחומים על־ידי מועדי הגילוי והסיום של כל קדקוד לבין מבנה הסוגריים המוצג. כל מלבן נמתח לאורך הקטע הנתון על־ידי מועדי הגילוי והסיום של הקדקוד המתאים. באיור מופיעות קשתות העץ. אם שני קטעים חותכים זה את זה, אזי אחד מהם מקונן בתוך האחר, והקדקוד המתאים לקטע הקטן יותר הוא צאצא של הקדקוד המתאים לקטע הגדול יותר. **(iii)** הגרף מחלק (i) משורטט בשנית כך שכל קשתות העץ והקשתות קדימה פונות כלפי מטה בעץ העומק וכל הקשתות אחורה פונות כלפי מעלה, מצאצא לאב קדמון.

המשפט הבא מביא אפיון חשוב נוסף המאפשר לקבוע אם קדקוד אחד הוא צאצא של קדקוד אחר ביער העומק.

משפט 23.8 (משפט המסלול הלבן)

ביער עומק של גרף $G = (V, E)$ (מכוון או בלתי־מכוון), קדקוד v הוא צאצא של קדקוד u אם ורק אם בזמן $d[u]$ שבו מגלה החיפוש את u, ניתן להגיע מ־u ל־v לאורך מסלול המורכב כולו מקדקודים לבנים.

הוכחה $\Leftarrow$: נניח כי v הוא צאצא של u. יהי w קדקוד כלשהו על המסלול מ־u ל־v בעץ העומק, כך ש־w הוא צאצא של u. על פי מסקנה 23.7, $d[u] < d[w]$, ולכן w הוא לבן בזמן $d[u]$.

$\Rightarrow$: נניח כי בזמן $d[u]$ ניתן להגיע מ־u לקדקוד v לאורך מסלול המורכב מקדקודים לבנים בלבד, אולם v אינו נעשה צאצא של u בעץ העומק. נניח, בלי הגבלת הכלליות, שכל קדקוד אחר

לאורך המסלול הופך לצאצא של u (אחרת, יהי v הקדקוד הקרוב ביותר ל־u לאורך המסלול שאינו נעשה צאצא של u). יהי w הקודם של v במסלול, כך ש־w הוא צאצא של u (למעשה, w ו־u עשויים להיות אותו קדקוד). על פי מסקנה 23.7, $f[w] \leq f[u]$. נשים לב כי v חייב להתגלות לאחר ש־u מתגלה, אולם לפני סיום הטיפול ב־w. לפיכך, $d[u] < d[v] < f[w] \leq f[u]$. ממשפט 23.6 נובע שהקטע $[d[v], f[v]]$ מוכל כולו בקטע $[d[u], f[u]]$. על פי מסקנה 23.7, v חייב אפוא להיות צאצא של u. ■

סיווג קשתות

תכונה מעניינת אחרת של חיפוש לעומק היא שניתן להשתמש בו לסיווג הקשתות בגרף הקלט $G = (V, E)$. באמצעות סיווג זה של הקשתות ניתן ללקט מידע חשוב על הגרף. לדוגמה, בסעיף הבא נראה שגרף מכוון הוא ללא מעגלים אם ורק אם חיפוש לעומק אינו מגלה בו קשתות "אחורה" (למה 23.10).

ניתן להגדיר ארבעה סוגים של קשתות במונחי יער העומק G_π הנוצר במהלך חיפוש לעומק של G:

1. **קשתות עץ** (tree edges) הן קשתות השייכות ליער העומק G_π. קשת (u, v) היא קשת עץ אם v התגלה לראשונה על־ידי בדיקת הקשת (u, v).
2. **קשתות אחורה** (back edges) הן אותן קשתות (u, v) המחברות קדקוד u לאב קדמון v בעץ עומק. לולאות עצמיות, שעשויות להופיע בגרפים מכוונים, נחשבות לקשתות אחורה.
3. **קשתות קדימה** (forward edges) הן אותן קשתות (u, v) שאינן קשתות עץ, אשר מחברות קדקוד u לצאצא v בעץ עומק.
4. **קשתות חוצות** (cross edges) הן כל הקשתות האחרות. הן עשויות לקשר קדקודים באותו עץ עומק, כל עוד קדקוד אחד אינו צאצא של האחר, או לקשר קדקודים בעצי עומק שונים.

באיורים 23.4 ו־23.5 רשום ליד כל קשת הסוג שלה. איור 23.5(iii) גם מראה כיצד ניתן לשרטט את הגרף מאיור 23.5(i) כך שכל קשתות העץ והקשתות קדימה פונות כלפי מטה בעץ העומק וכל הקשתות אחורה פונות כלפי מעלה. כל גרף ניתן להצגה באופן זה.

את האלגוריתם DFS ניתן לשנות כך שיסווג קשתות כאשר הוא נתקל בהן. רעיון המפתח הוא שכל קשת (u, v) ניתן לסווג על פי צבעו של הקדקוד שמגיעים אליו כאשר הקשת נבדקת לראשונה (פרט לכך שלא ניתן להבחין בין קשתות קדימה לקשתות חוצות):

1. **לבן** (WHITE) מצביע על קשת עץ;
2. אפור (GREY) מצביע על קשת אחורה;
3. שחור (BLACK) מצביע על קשת קדימה או קשת חוצה.

המקרה הראשון נובע ישירות מאפיון האלגוריתם. עבור המקרה השני, נשים לב כי קדקודים אפורים יוצרים תמיד שרשרת לינארית של צאצאים המתאימה למחסנית הקריאות הפעילות עדיין ל־DFS-Visit; מספר הקדקודים האפורים גדול ב־1 מעומקו ביער העומק של הקדקוד האחרון שהתגלה. בדיקת קשתות מתקדמת תמיד מן הקדקוד האפור העמוק ביותר, כך שקשת שמגיעה לקדקוד אפור נוסף מגיעה לאב קדמון. המקרה השלישי מתייחס לאפשרות הנותרת; ניתן להראות שקשת (u, v) כזאת היא קשת קדימה אם $d[u] < d[v]$, וקשת חוצה אם $d[u] > d[v]$ (ראה תרגיל 23.3-4).

בגרף בלתי־מכוון עלולה להתעורר דו־משמעות מסוימת בסיווג הקשתות, שכן (u, v) ו־(v, u) הן למעשה אותה קשת. במקרה כזה, סוג הקשת נקבע כסוג *הראשון* ברשימת הסיווג החל על הקשת.

באופן שקול (ראה תרגיל 23.3-5), סוג הקשת נקבע על פי הכיוון (דהיינו, (u, v) או (v, u)) שבו נתקלים בה לראשונה במהלך ביצוע האלגוריתם.

נראה עתה שבחיפוש לעומק של גרף בלתי־מכוון לא מתקבלות לעולם קשתות קדימה וקשתות חוצות.

משפט 23.9
בחיפוש לעומק של גרף בלתי־מכוון G, כל קשת ב־G היא קשת עץ או שהיא קשת אחורה.

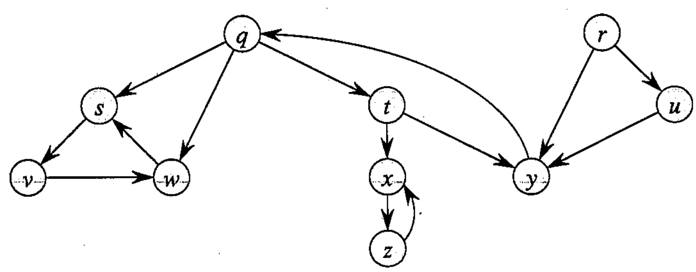
הוכחה תהי (u, v) קשת כלשהי ב־G ונניח, בלי הגבלת הכלליות, כי $d[u] < d[v]$. אזי, הגילוי של v והטיפול בו חייבים להסתיים לפני סיום הטיפול ב־u, שכן v שייך לרשימת הסמיכות של u. אם הקשת (u, v) נבדקת תחילה בכיוון מ־u ל־v, אזי (u, v) נעשית קשת עץ. אם (u, v) נבדקת תחילה בכיוון מ־v ל־u, אזי (u, v) היא קשת אחורה, שכן u עדיין אפור בעת שהקשת נבדקת לראשונה. ■

בסעיפים הבאים נראה יישומים רבים של משפטים אלה.

תרגילים

23.3-1
הכן טבלה של 3×3, שבה כותרות השורות והעמודות הן: לבן, אפור, שחור. בכל משבצת (i, j) ציין אם בנקודה כלשהי במהלך חיפוש לעומק של גרף מכוון יכולה להיות קשת מקדקוד בצבע i לקדקוד בצבע j. עבור כל קשת אפשרית, ציין לאילו סוגים היא עשויה להשתייך. ערוך טבלה שנייה כזאת עבור חיפוש לעומק של גרף בלתי־מכוון.

23.3-2
הראה כיצד פועל חיפוש לעומק על הגרף שבאיור 23.6. הנח כי לולאת ה־**for** בשורות 7-5 של DFS בוחנת את הקדקודים בסדר אלפביתי וכי סדר הקדקודים בכל רשימת סמיכות גם הוא אלפביתי. הראה את מועדי הגילוי והסיום של כל קדקוד ואת הסוג של כל קשת.



איור 23.6 גרף מכוון עבור תרגילים 23.3-2 ו־23.5-2.

23.3-3
הצג את מבנה הסוגריים של החיפוש לעומק מאיור 23.4.

23.3-4
הראה שקשת (u, v) היא -

א. קשת עץ או קשת קדימה אם ורק אם $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$.

ב. קשת אחורה אם ורק אם $d[v] < d[u] < f[u] < f[v]$.

ג. קשת חוצה אם ורק אם $d[v] < f[v] < d[u] < f[u]$.