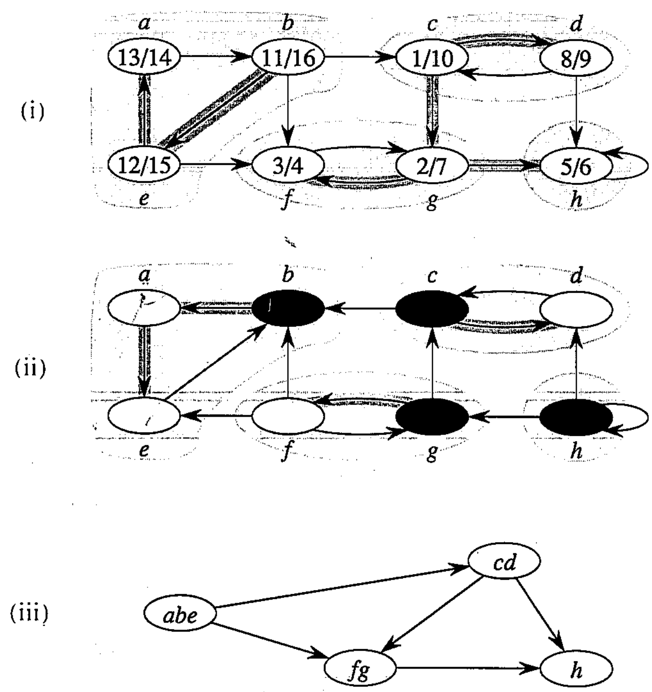
23.5 רכיבים קשירים היטב

נתבונן עתה ביישום קלאסי של חיפוש לעומק: פירוק גרף מכוון לרכיביו הקשירים היטב. בסעיף זה נראה כיצד מבצעים פירוק כזה באמצעות שני חיפושים לעומק. אלגוריתמים רבים לעבודה עם גרפים מכוונים מתחילים את פעולתם בפירוק כזה; גישה זו מאפשרת לעתים קרובות לחלק את הבעיה המקורית לתת־בעיות — אחת לכל רכיב קשיר היטב. צירוף הפתרונות לתת־בעיות נעשה על־פי מבנה הקשרים בין רכיבים קשירים היטב; את המבנה הזה אפשר לייצג על־ידי גרף הידוע כגרף "הרכיבים", והוא יוגדר בתרגיל 23.5-4.

כאמור בפרק 5, רכיב קשיר היטב של גרף מכוון $G = (V, E)$ הוא קבוצה מקסימלית של קדקודים $U \subseteq V$ כך שעבור כל זוג קדקודים u ו־v ב־U, מתקיים $u \leadsto v$ וגם $v \leadsto u$; דהיינו, הקדקודים u ו־v ניתנים להגעה הדדית. באיור 23.9 מוצגת דוגמה.

האלגוריתם שלנו למציאת רכיבים קשירים היטב של גרף $G = (V, E)$ משתמש בגרף המוחלף של G, המוגדר בתרגיל 23.1-3 כגרף $G^{\mathrm{T}} = (V, E^{\mathrm{T}})$, כאשר $E^{\mathrm{T}} = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$. כלומר, E^{T} מורכבת מהקשתות של G כאשר כיווניהן הפוכים. בהינתן ייצוג של G על־ידי רשימות סמיכות, הזמן ליצירת G^{T} הוא $O(V + E)$. מעניין לציין כי ל־G ול־G^{T} יש בדיוק אותם רכיבים קשירים היטב: u ו־v ניתנים להגעה הדדית ב־G אם ורק אם הם ניתנים להגעה הדדית ב־G^{T}. באיור 23.9(ii) מוצג הגרף המוחלף של הגרף מאיור 23.9(i), כאשר הרכיבים הקשירים היטב מוצללים.



איור 23.9 **(i)** גרף מכוון G. הרכיבים הקשירים היטב של G מוצגים באיור כאזורים מוצללים. בתוך כל קדקוד רשומים מועדי הגילוי והסיום שלו. קשתות־עץ מופיעות כשהן מוצללות. **(ii)** הגרף G^{T} — הגרף המוחלף של G. יער העומק המחושב בשורה 3 של Strongly-Connected-Components מוצג עם קשתות עץ מוצללות. כל רכיב קשיר היטב מתאים לעץ עומק אחד. הקדקודים b, c, g ו־h, המופיעים באיור בצבע שחור, הם אבות קדומים ביותר של כל קדקוד ברכיב הקשיר היטב שלהם; קדקודים אלה הם גם שורשים של עצי העומק הנוצרים על־ידי חיפוש לעומק של G^{T}. **(iii)** גרף הרכיבים חסר המעגלים G^{SCC} המתקבל על־ידי כך שמכווצים כל רכיב קשיר היטב של G לקדקוד יחיד.

האלגוריתם הבא, שזמן ריצתו לינארי (דהיינו, $\Theta(V+E)$), מחשב את הרכיבים הקשירים היטב של גרף מכוון $G=(V,E)$ באמצעות שני חיפושים לעומק, אחד על G ואחד על G^{T}.

```
STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS(G)
1  call DFS(G) to compute finishing times f[u] for each vertex u
2  compute G^T
3  call DFS(G^T), but in the main loop of DFS, consider the vertices
          in order of decreasing f[u] (as computed in line 1)
4  output the vertices of each tree in the depth-first forest of step 3 as a
          separate strongly connected component
```

במבט ראשון נראה כאילו אין קשר בין אלגוריתם פשוט למראה זה לבין רכיבים קשירים היטב. את יתרתו של סעיף זה נקדיש לפענוח חידת מבנהו של האלגוריתם ולהוכחת נכונותו. נתחיל בשתי הבחנות שימושיות.

למה 23.12

אם שני קדקודים נמצאים באותו רכיב קשיר היטב, אזי כל מסלול המחבר ביניהם לעולם אינו יוצא מהרכיב הקשיר היטב.

הוכחה יהיו u ו־v שני קדקודים באותו רכיב קשיר היטב. על פי ההגדרה של רכיב קשיר היטב ישנם מסלולים מ־u ל־v ומ־v ל־u. יהי w קדקוד על מסלול כלשהו $u \rightsquigarrow w \rightsquigarrow v$, כך ש־$w$ ניתן להגעה מ־u. יתר על כן, מאחר שקיים מסלול $v \rightsquigarrow u$, אנו יודעים כי u ניתן להגעה מ־w באמצעות המסלול $w \rightsquigarrow v \rightsquigarrow u$. לפיכך, u ו־w נמצאים באותו רכיב קשיר היטב. מכיוון ש־w נבחר אקראית, המשפט הוכח. ■

משפט 23.13

בכל חיפוש לעומק, כל הקדקודים השייכים לאותו רכיב קשיר היטב ממוקמים באותו עץ עומק.

הוכחה מבין הקדקודים הנמצאים ברכיב הקשיר היטב, יהי r הראשון שמתגלה. מאחר ש־r הוא הראשון להתגלות, הרי שבעת גילויו, הקדקודים האחרים ברכיב הקשיר היטב צבועים בלבן. קיימים מסלולים מ־r לכל קדקוד אחר ברכיב הקשיר היטב; מכיוון שמסלולים אלה לעולם אינם יוצאים מהרכיב הקשיר היטב (על פי למה 23.12), כל הקדקודים עליהם הם לבנים. לכן, על פי משפט המסלול הלבן, כל קדקוד ברכיב הקשיר היטב הופך להיות צאצא של r בעץ העומק. ■

בשאריתו של סעיף זה, הסימונים $d[u]$ ו־$f[u]$ מתייחסים למועדי הגילוי והסיום כפי שהם מחושבים על־ידי החיפוש לעומק הראשון בשורה 1 של STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS. בצורה דומה, הסימון $u \rightsquigarrow v$ מתייחס לקיומו של מסלול ב־G, ולא ב־G^{T}.

לצורך הוכחת נכונותה של השגרה STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS, נציג את המושג **אב קדום ביותר** (forefather) $\phi(u)$ של קדקוד u, שהוא הקדקוד w הניתן להגעה מ־u, אשר סיים אחרון בחיפוש לעומק שבשורה 1. במילים אחרות:

$\phi(u)=$ אותו קדקוד w שעבורו מתקיים $u \rightsquigarrow w$ ו־$f[w]$ מקסימלי.

יש לשים לב כי $\phi(u)=u$ אפשרי, שכן ניתן להגיע מ־u ל־u, ולכן:

$$f[u] \le f[\phi(u)] \qquad (23.2)$$

כמו כן ניתן להראות כי $\phi(\phi(u))=\phi(u)$, באמצעות הטיעון שלהלן. עבור קדקודים כלשהם $u,v \in V$ מתקיים:

$$u \rightsquigarrow v \Rightarrow f[\phi(v)] \le f[\phi(u)] \tag{23.3}$$

שכן $\{w : v \rightsquigarrow w\} \subseteq \{w : u \rightsquigarrow w\}$ והאב הקדום ביותר הוא בעל מועד הסיום המקסימלי מבין הקדקודים שניתן להגיע אליהם. מאחר ש־$\phi(u)$ ניתן להגעה מ־u, הרי שנוסחה (23.3) גוררת כי $f[\phi(\phi(u))] \le f[\phi(u)]$. כמו כן מתקיים $f[\phi(u)] \le f[\phi(\phi(u))]$, על פי אי־שוויון (23.3). לפיכך, $f[\phi(\phi(u))] = f[\phi(u)]$, ומכאן $\phi(\phi(u)) = \phi(u)$, שכן שני קדקודים בעלי מועדי סיום שווים הם למעשה אותו קדקוד.

כפי שנראה מיד, בכל רכיב קשיר היטב ישנו קדקוד אחד שהוא האב הקדום ביותר של כל קדקוד ברכיב זה; אב קדום ביותר זה הוא "קדקוד נציגי" של הרכיב הקשיר היטב. בחיפוש לעומק של G, זהו הקדקוד הראשון מבין קדקודי הרכיב הקשיר היטב שמתגלה, והקדקוד האחרון מבין קדקודי הרכיב הקשיר היטב שמסתיים. בחיפוש לעומק של G^{T}, זהו השורש של עץ העומק. עתה נוכיח תכונות אלה.

המשפט הראשון מצדיק את כינויו של $\phi(u)$ כ־"אב קדום ביותר" של u.

משפט 23.14

בגרף מכוון $G = (V, E)$, האב הקדום ביותר $\phi(u)$ של קדקוד $u \in V$ כלשהו בחיפוש לעומק כלשהו של G הוא אב קדמון של u.

הוכחה אם $\phi(u) = u$, המשפט נכון באופן טריוויאלי. אם $\phi(u) \ne u$, נתבונן בצבעי הקדקודים בזמן $d[u]$. אם $\phi(u)$ שחור, אזי $f[\phi(u)] < f[u]$, בסתירה לאי־שוויון (23.2). אם $\phi(u)$ אפור, אזי הוא אב קדמון של u והמשפט הוכח.

נותר אפוא להוכיח כי $\phi(u)$ אינו לבן. ישנם שני מקרים, בהתאם לצבעיהם של קדקודי הביניים, אם יש כאלה, על המסלול מ־u ל־$\phi(u)$.

1. אם כל קדקוד ביניים הוא לבן, אזי $\phi(u)$ הופך להיות צאצא של u, על פי משפט המסלול הלבן. אולם אז $f[\phi(u)] < f[u]$, בסתירה לאי־שוויון (23.2).

2. אם אחד מקדקודי הביניים אינו לבן, יהי t הקדקוד האחרון שאינו לבן על המסלול מ־u ל־$\phi(u)$. אזי, t בהכרח אפור, שכן לעולם לא תיתכן קשת מקדקוד שחור לקדקוד לבן, והעוקב של t צבוע בלבן. אולם אז קיים מסלול של קדקודים לבנים מ־t ל־$\phi(u)$, ועל פי משפט המסלול הלבן, $\phi(u)$ הוא צאצא של t. מכך נובע כי $f[t] > f[\phi(u)]$, בסתירה לבחירת $\phi(u)$, שכן קיים מסלול מ־u ל־t. ■

מסקנה 23.15

בכל חיפוש לעומק של גרף מכוון $G = (V, E)$, עבור כל $u \in V$, הקדקודים u ו־$\phi(u)$ שייכים לאותו רכיב קשיר היטב.

הוכחה $u \rightsquigarrow \phi(u)$, על פי ההגדרה של אב קדום ביותר, ו־$\phi(u) \rightsquigarrow u$, שכן $\phi(u)$ הוא אב קדמון של u. ■

המשפט הבא נותן תוצאה חזקה יותר לגבי הקשר בין אבות קדומים ביותר לרכיבים קשירים היטב.

משפט 23.16

בגרף מכוון $G = (V, E)$, שני קדקודים $u,v \in V$ נמצאים באותו רכיב קשיר היטב אם ורק אם יש להם אותו אב קדום ביותר בחיפוש לעומק של G.

הוכחה $\Leftarrow$: נניח כי u ו־v נמצאים באותו רכיב קשיר היטב. כל קדקוד שניתן להגיע אליו מ־u, ניתן להגיע אליו גם מ־v ולהיפך, מכיוון שבין u ו־v קיימים מסלולים בשני הכיוונים. על פי ההגדרה של אב קדום ביותר אנו מסיקים אפוא כי $\phi(u) = \phi(v)$.

$\Rightarrow$: נניח כי $\phi(u) = \phi(v)$. על פי מסקנה 23.15, u נמצא באותו רכיב קשיר היטב שבו נמצא $\phi(u)$, ו־v נמצא באותו רכיב קשיר היטב שבו נמצא $\phi(v)$. לכן, u ו־v נמצאים באותו רכיב קשיר היטב. ■

עתה, כשבידינו משפט 23.16, אפשר להבין ביתר קלות את מבנהו של האלגוריתם STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS. הרכיבים הקשירים היטב הם קבוצות של קדקודים בעלי אותו אב קדום ביותר. יתירה מזו, על פי משפט 23.14 ומשפט הסוגריים (משפט 23.6), במהלך החיפוש לעומק שבשורה 1 של STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS, אב קדום ביותר הוא הקדקוד המתגלה ראשון ומסתיים אחרון בתוך הרכיב הקשיר היטב שלו.

כדי להבין מדוע אנו מריצים את החיפוש לעומק שבשורה 3 של האלגוריתם STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS על G^{T}, נתבונן בקדקוד r בעל מועד הסיום הגדול ביותר שחושב על־ידי החיפוש לעומק שבשורה 1. על פי ההגדרה של אב קדום ביותר, הקדקוד r חייב להיות אב קדום ביותר, שכן הוא אב קדום ביותר של עצמו: ניתן להגיע ממנו אל עצמו, ואין בגרף קדקוד בעל מועד סיום גדול יותר. מהם הקדקודים האחרים ברכיב הקשיר היטב של r? אלה הם אותם קדקודים אשר r הוא האב הקדום ביותר שלהם — אותם קדקודים שמהם ניתן להגיע אל r אולם לא אל שום קדקוד בעל מועד סיום גדול מ־$f[r]$. אולם מועד הסיום של r הוא המקסימלי מבין מועדי הסיום של הקדקודים ב־G; לכן, הרכיב הקשיר היטב של r מורכב פשוט מאותם קדקודים שמהם ניתן להגיע אל r. באופן שקול, *הרכיב הקשיר היטב של r מורכב מאותם קדקודים שניתן להגיע אליהם מ־r ב־G^{T}*. אם כן, החיפוש לעומק שבשורה 3 מזהה את כל הקדקודים הנמצאים ברכיב הקשיר היטב של r וצובע אותם בשחור. (חיפוש לרוחב, או כל חיפוש שהוא של הקדקודים שניתן להגיע אליהם מ־r, יכולים לזהות קבוצה זו באותה קלות.)

לאחר שהחיפוש לעומק שבשורה 3 מסיים לזהות את הרכיב הקשיר היטב של r, הוא מתחיל בקדקוד r' בעל מועד הסיום הגדול ביותר מבין הקדקודים שאינם שייכים לרכיב הקשיר היטב של r. הקדקוד r' חייב להיות האב הקדום ביותר של עצמו, שכן לא ניתן להגיע ממנו אל קדקוד כלשהו בעל מועד סיום גדול יותר (אחרת, r' היה נכלל ברכיב הקשיר היטב של r). באמצעות טיעון דומה, כל קדקוד שממנו ניתן להגיע אל r' ואשר אינו צבוע כבר בשחור חייב להימצא ברכיב הקשיר היטב של r'. לכן, ככל שהחיפוש לעומק שבשורה 3 מתקדם, הוא מזהה וצובע בשחור כל קדקוד השייך לרכיב הקשיר היטב של r' על־ידי חיפוש מ־r' ב־G^{T}.

אם כן, החיפוש לעומק שבשורה 3 "מקלף" מן הגרף רכיבים קשירים היטב, אחד אחד. כל רכיב מזוהה בשורה 7 של DFS על־ידי קריאה ל־DFS-VISIT עם האב הקדום ביותר של הרכיב כארגומנט. קריאות רקורסיביות בתוך DFS-VISIT צובעות בסופו של דבר בשחור כל קדקוד השייך לרכיב. כאשר השגרה DFS-VISIT חוזרת ל־DFS, הרכיב כולו כבר נצבע בשחור ו"קולף" מן הגרף. לאחר מכן, DFS מוצאת את הקדקוד בעל מועד הסיום המקסימלי מבין הקדקודים שטרם נצבעו בשחור. קדקוד זה הוא האב הקדום ביותר של רכיב נוסף, והתהליך נמשך.

המשפט הבא מנסח טיעון זה ניסוח פורמלי.

משפט 23.17
השגרה STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS(G) מחשבת כהלכה את הרכיבים הקשירים היטב של גרף מכוון G.

הוכחה נוכיח באינדוקציה על מספר עצי העומק המתגלים בחיפוש לעומק של G^T כי הקדקודים בכל עץ יוצרים רכיב קשיר היטב. כל צעד בטיעון האינדוקטיבי מוכיח שעץ הנוצר בחיפוש לעומק של G^T הוא רכיב קשיר היטב, בהנחה שכל העצים שנוצרו לפניו הם רכיבים קשירים היטב. בסיס האינדוקציה טריוויאלי, שכן לעץ הראשון שנוצר אין עצים שנוצרו לפניו, ולכן ההנחה נכונה באופן טריוויאלי.

נתבונן בעץ עומק T בעל שורש r הנוצר בחיפוש לעומק של G^T. נסמן ב־$C(r)$ את קבוצת הקדקודים ש־r הוא האב הקדום ביותר שלהם:

$$C(r) = \{v \in V : \phi(v) = r\}$$

עתה נוכיח שקדקוד u מוצב ב־T אם ורק אם $u \in C(r)$.

$\Leftarrow$: ממשפט 23.13 נובע שכל הקדקודים ב־$C(r)$ יימצאו בסופו של דבר באותו עץ עומק. מכיוון ש־$r \in C(r)$ ו־r הוא השורש של T, כל איבר ב־$C(r)$ יימצא בסופו של דבר ב־T.

$\Rightarrow$: נראה כי כל קדקוד w שעבורו $f[\phi(w)] > f[r]$ או $f[\phi(w)] < f[r]$ אינו מוצב ב־T, על־ידי כך שנתבונן בנפרד בשני המקרים. באינדוקציה על מספר העצים המתגלים, כל קדקוד w שעבורו $f[\phi(w)] > f[r]$ אינו מוצב בעץ T, שכן בזמן ש־r נבחר, w כבר מוצב בעץ ששורשו $\phi(w)$. כל קדקוד w שעבורו $f[\phi(w)] < f[r]$ אינו יכול להיות מוצב ב־T, מכיוון שהצבה כזאת היתה גוררת $r \rightsquigarrow w$; לכן, על פי נוסחה (23.3) והתכונה כי $r = \phi(r)$, נקבל כי $f[\phi(w)] \geq f[\phi(r)] = f[r]$, בסתירה לכך ש־$f[\phi(w)] < f[r]$.

לכן, T מכיל בדיוק אותם קדקודים u שעבורם $\phi(u) = r$. כלומר, T שווה בדיוק לרכיב הקשיר היטב $C(r)$, ובכך נשלמה ההוכחה באינדוקציה. ■

בעיות

תרגילים

23.5-1

כיצד יכול להשתנות מספר הרכיבים הקשירים היטב בגרף אם מוסיפים קשת חדשה?

23.5-2

הראה כיצד פועלת השגרה STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS על הגרף שבאיור 23.6. בפרט, הצג את מועדי הסיום המחושבים בשורה 1 ואת היער הנוצר בשורה 3. הנח שהלולאה בשורות 5-7 של DFS בוחנת קדקודים בסדר אלפביתי ושרשימות הסמיכות מסודרות בסדר אלפביתי.

23.5-3

פרופסור דיוור טוען שניתן לפשט את האלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב על־ידי שימוש בגרף המקורי (ולא בגרף המוחלף) בחיפוש לעומק השני וסריקת הקדקודים בסדר *עולה* של זמני סיום. האם הפרופסור צודק?

23.5-4

את **גרף הרכיבים** (component graph) של גרף מכוון $G = (V, E)$ אנו מסמנים על־ידי $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$, כאשר V^{SCC} מכילה קדקוד אחד עבור כל רכיב קשיר היטב ב־G ו־E^{SCC} מכילה את הקשת (u, v) אם מקדקוד ברכיב הקשיר היטב של G המתאים ל־u קיימת